Problema 1 (WC15-1)**.** Siano a, b e c reali positivi tali che $a^3 + b^3 + c^3 = a^4 + b^4 + c^4$. Dimostrare che vale:

$$\frac{a}{a^2 + b^4 + c^4} + \frac{b}{a^4 + b^2 + c^4} + \frac{c}{a^4 + b^4 + c^2} \geq 1$$

Problema 2 (WC15-2old)**.** Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$(x + y)(f(x) - f(y)) = (x - y)f(x + y)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 3 (WC15-2new)**.** Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x - f(y)) = f(-x) + (f(y) - 2x)f(-y)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 4 (WC15-3)**.** Dato il polinomio $p(x) = x^2 + 4x - 4$, consideriamo la successione definita per ricorrenza, $a(1) = 1$ e

$$a(n) = \sum_{k=1}^{n-1} p(n - k)a(k), \qquad n \geq 2$$

Si determini il più piccolo $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $a(n) \leq 2015\alpha^n$ per ogni $n \geq 1$.

Problema 5 (WC15-4)**.** Trovare tutte le funzioni f dai razionali positivi ai reali positivi tali che per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$ con $x, y > 0$, si abbia

$$f(xy) = f(x + y)\big(f(x) + f(y)\big)$$

Problema 6 (WC15-5)**.** Siano a, b, c reali positivi tali che $ab + bc + ca = 1$. Dimostrare che

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{a} + 6\sqrt{3}b} + \sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{b} + 6\sqrt{3}c} + \sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{c} + 6\sqrt{3}a} \leq \frac{1}{abc}$$

e dire quando vale l'uguaglianza.

Problema 7 (WC15-6)**.** Siano a, b, c reali positivi. Dimostrare che

$$1 \leq (1 - a)^2 + (1 - b)^2 + (1 - c)^2 + \frac{2\sqrt{2}abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Problema 8 (WC15-M1)**.** Consideriamo l'insieme $\mathcal{S}$ dei polinomi $P(x)$ a coefficienti reali tali che

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y^2 - P(x)| \leq 2|x|\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x^2 - P(y)| \leq 2|y|\}.$$

Determinare i possibili valori di $P(0)$ al variare di $P(x)$ in $\mathcal{S}$.

Problema 9 (WC14-1)**.** Siano a, b e c reali positivi tali che $a+b+c = ab+bc+ca$. Dimostrare che vale la seguente disuguaglianza e dire quando si ha l'uguaglianza.

$$\frac{1}{a^2+b+1} + \frac{1}{b^2+c+1} + \frac{1}{c^2+a+1} \leq 1.$$

Problema 10 (WC14-2)**.** Determinare tutte le funzioni surgettive da $(0,\infty)$ in s tali che per ogni $x > 0$ si abbia,

$$xf(x) + f(x)f(f(x)) = 2xf(f(x)).$$

Problema 11 (WC14-3)**.** Determinare A e B tali che per ogni scelta di x, y e z reali positivi si abbia,

$$A \leq \frac{4x+y}{x+4y} + \frac{4y+z}{y+4z} + \frac{4z+x}{z+4x} \leq B.$$

Dire se per entrambe le disuguaglianze possa valere l'uguaglianza.

Problema 12 (WC14-4)**.** Dimostrare che per tutte le terne positive a, b, c che soddisfano $abc = 1$, si ha,

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a(a+1)+ab(ab+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Problema 13 (WC14-5)**.** Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(xf(y)) + y + f(x) = f(x + f(y)) + yf(x).$$

Problema 14 (WC14-6)**.** Dimostrare che per ogni scelta di a, b, c, d non negativi si ha

$$(ab)^{\frac{1}{3}} + (cd)^{\frac{1}{3}} \leq \left[(a+c+b)\,(a+c+d)\right]^{\frac{1}{3}}.$$

Problema 15 (WC14-M1)**.** Sia $n \geq 2$ un numero intero, e siano $a_1, \dots, a_{n-1}$ numeri reali qualunque. Siano $(u_0, u_1, \dots, u_n)$ e $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ due $(n+1)$-uple tali che

- $u_0 = u_1 = v_0 = v_1 = 1$,
- $u_{k+1} = u_k + a_k u_{k-1}$ per ogni $k = 1, \dots, n-1$,
- $v_{k+1} = v_k + a_{n-k} v_{k-1}$ per ogni $k = 1, \dots, n-1$.

Dimostrare che $u_n = v_n$.

Problema 16 (WC14-M2)**.** Dimostrare che, per ogni intero positivo n, il polinomio

$$p(x) = (x^2 - 8x + 25)(x^2 - 16x + 100) \cdot \ldots \cdot (x^2 - 8nx + 25n^2) + 1$$

è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$.

Problema 17 (WC14-M3)**.** Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x + y) + y \leq f(f(f(x)))$$

per ogni coppia di numeri reali x e y.

Problema 18 (WC13-1)**.** Determinare tutti i polinomi $p(x)$ per i quali esiste una costante reale a tale che valga l'identità seguente

$$p(x + x^2 + x^4) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)\, p(ax).$$

Problema 19 (WC13-2)**.** Sia f una funzione da $\mathbb{Z}$ in sé tale che per ogni coppia di interi x, y si abbia

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x))$$

Dimostrare che f è limitata.

Problema 20 (WC13-3)**.** Dato $n \geq 4$, siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ numeri reali tali che

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n \qquad \text{e} \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq n^2$$

Dimostrare che $\max(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 2$.

Problema 21 (WC13-4)**.** I numeri reali positivi x, y e z soddisfano $xyz + xy + yz + zx = x + y + z + 1$. Dimostrare che

$$\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1+x}}+\sqrt{\frac{1+y^2}{1+y}}+\sqrt{\frac{1+z^2}{1+z}}\right) \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{5/8}.$$

Problema 22 (WC13-5)**.** Dimostrare che se a, b e c sono le lunghezze dei lati di un triangolo acutangolo e R è il raggio della circonferenza circoscritta, allora

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a^3+b^3+c^3} \geq \sqrt{3}R$$

Problema 23 (WC13-6)**.** Per ogni intero $n \geq 3$, si determini l'insieme dei valori assunti dall'espressione

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}$$

al variare delle n-uple di reali $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 1$ che soddisfano $|x_k - x_{k+1}| \leq 1$ per ogni $1 \leq k \leq n-1$. Si determini anche quando vengono assunti i valori estremali.

Problema 24 (WC13-7)**.** Determinare tutti gli α reali tali che esiste una e una sola funzione dai reali in sé che soddisfi

$$f(x^2 + y + f(y)) = f(x)^2 + \alpha y$$

per ogni x e y.

Problema 25 (WC13-8)**.** Sia $p(x)$ un polinomio monico a coefficienti reali di grado $n \geq 2$. Supponiamo che per qualche k intero positivo, $(x-1)^{k+1}$ divida $p(x)$. Dimostrare che la somma dei valori assoluti dei coefficienti di $p(x)$ è strettamente maggiore di $2 + \dfrac{2k^2}{n}$.

Problema 26 (WC12-1)**.** Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(f(x-y)) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy$$

per ogni coppia di numeri reali x e y.

Problema 27 (WC12-2)**.** Dimostrare che

$$\frac{1+a^2}{1+b+c^2}+\frac{1+b^2}{1+c+a^2}+\frac{1+c^2}{1+a+b^2}\geq 2$$

per ogni terna (a,b,c) di numeri reali maggiori di -1.

Problema 28 (WC12-3)**.** Sia $n\geq 2$ un numero intero, e siano $x_1,\ldots,x_n$ numeri reali positivi tali che

$$(x_1+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\leq\left(n+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Dimostrare che

$$\max\{x_1,\ldots,x_n\}\leq 4\min\{x_1,\ldots,x_n\}.$$

Problema 29 (WC12-4)**.** Dimostrare che

$$\frac{1}{x+y^{20}+z^{12}}+\frac{1}{y+z^{20}+x^{12}}+\frac{1}{z+x^{20}+y^{12}}\leq 1$$

per ogni terna (x,y,z) di numeri reali positivi tali che $xyz=1$.

Problema 30 (WC12-5)**.** Dimostrare che

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\geq\frac{9}{4}$$

per ogni terna (a,b,c) di numeri reali non negativi.

Problema 31 (WC12-6)**.** Dimostrare che

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)\left(1+\sqrt[4]{abcd}\right)^4\geq 16abcd(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$$

per ogni quaterna (a,b,c,d) di numeri reali positivi.

Problema 32 (WC12-7)**.** Determinare tutte le funzioni $f:\mathbb{R}\in\mathbb{R}$ tali che

$$f(xf(y)+f(x))=2f(x)+xy$$

per ogni coppia di numeri reali x e y.

Problema 33 (WC12-8)**.** Sia x un numero reale positivo, e siano a e b due numeri interi relativamente primi.

1. Dimostrare che, se $x^a + x^{-a}$ e $x^b + x^{-b}$ sono entrambi razionali, allora $x^n + x^{-n}$ è razionale per ogni n intero.

2. Dimostrare che, se $x^a + x^{-a}$ e $x^b + x^{-b}$ sono entrambi interi, allora $x^n + x^{-n}$ è intero per ogni n intero.

Problema 34 (WC11-1)**.** Per ogni polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ a coefficienti interi definiamo

$$\|p(x)\| = \max_{0 \le i \le n} |a_i|.$$

1. Determinare se esistono due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ a coefficienti interi tali che

$$\|p(x)\| \geq 2011, \qquad \|q(x)\| \geq 2011, \qquad \|p(x)q(x)\| = 1.$$

2. Determinare se esiste un polinomio $p(x)$ a coefficienti interi tale che

$$\|(x^2 - 3x + 1)p(x)\| = 1.$$

Problema 35 (WC11-2)**.** Sia a_n la successione definita per ricorrenza da

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1, \qquad a_1 = 2.$$

Determinare il più piccolo numero reale L tale che

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} < L$$

per ogni intero positivo k.

Problema 36 (WC11-3)**.** Determinare, per ogni intero $n \geq 2$, la più grande costante C_n tale che

$$\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \right)^2 + C_n (a_1 - a_n)^2$$

per ogni n-upla di numeri reali positivi $a_1, \ldots, a_n$.

Problema 37 (WC11-4)**.** Dimostrare che

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}} \leq \frac{2}{3} \sum_{\text{cyc}} a^2 \cdot \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a+b}$$

per ogni terna (a, b, c) di numeri reali positivi.

Problema 38 (WC11-5)**.** Dimostrare che

$$\frac{1}{a^5(b+2c)^2} + \frac{1}{b^5(c+2a)^2} + \frac{1}{c^5(a+2b)^2} \geq \frac{1}{3}$$

per ogni terna (a, b, c) di numeri reali positivi tali che $abc = 1$.

Problema 39 (WC11-6)**.** Siano a, b, c, d numeri reali tali che

$$a+b+c+d = 6 \qquad \text{e} \qquad a^2+b^2+c^2+d^2 = 12.$$

1. Dimostrare che

$$36 \leq 4(a^3+b^3+c^3+d^3) - (a^4+b^4+c^4+d^4) \leq 48.$$

2. Dimostrare che la disuguaglianza di destra vale anche assumendo soltanto l'uguaglianza di destra.

Problema 40 (WC11-7)**.** Siano dati k punti del piano cartesiano (x_i, y_i) (con $i = 1, \ldots, k$) a 3 a 3 non allineati. Determinare, in funzione di k, il più piccolo intero positivo d con questa proprietà:

> "comunque si scelgano k numeri reali positivi $c_1, \ldots, c_k$, esiste sempre un polinomio $P(x, y)$ a coefficienti reali, di grado minore od uguale a d, tale che $P(x_i, y_i) = c_i$ per ogni $i = 1, \ldots, k$".

Problema 41 (WC11-8)**.** Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y+1)f(x) + (x+1)f(y)$$

per ogni coppia di numeri reali x e y.

Problema 42 (WC10-1)**.** Per ogni intero positivo n, poniamo

$$f(n) = n + \max\left\{m \in \mathbb{N} : 2^{2^m} \leq n2^n\right\}.$$

Determinare l'immagine della funzione f.

Problema 43 (WC10-2)**.** Siano a, b, c numeri reali positivi tali che

$$a+b+c \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Dimostrare che

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}.$$

Problema 44 (WC10-3)**.** Sia $n>3$ un numero intero. Determinare la più grando costante a_n e la più piccola costante b_n tali che

$$a_n \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1}+x_i+x_{i+1}} \leq b_n,$$

per ogni n-upla di numeri reali positivi $(x_1,\ldots,x_n)$. Si intende che nella sommatoria gli indici sono pensati modulo n.

Problema 45 (WC10-4)**.** Siano m ed n due numeri interi, con $n>m\geq 0$. Siano I e J due insiemi di indici, con $|I|=|J|=n$ e $|I\cap J|=m$. Per ogni $k\in I\cup J$ sia u_k un vettore dello spazio.

Supponiamo che

$$\left|\sum_{i\in I} u_i\right| = \left|\sum_{j\in I} u_j\right| = 1.$$

Dimostrare che

$$\sum_{k\in I\cup J} |u_k|^2 \geq \frac{2}{m+n}.$$

Problema 46 (WC10-5)**.** Siano a, b, c numeri reali positivi tali che

$$ab+bc+ca \leq abc.$$

Dimostrare che

$$3+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}} \leq \sqrt{2}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right).$$

Problema 47 (WC10-6)**.** Dimostrare che

$$a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)}$$

per ogni terna (a,b,c) di numeri reali positivi.

Problema 48 (WC10-7)**.** Determinare tutte le funzioni $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ tali che

$$f(x+y-z) + f(2\sqrt{xz}) + f(2\sqrt{yz}) = f(x+y+z)$$

per ogni terna (x, y, z) di numeri reali positivi tali che $x + y > z$.

Problema 49 (WC10-8)**.** Sia n un intero positivo, e sia $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \in \{0,1\}^{n-1}$. Definiamo per ricorrenza i numeri $a_0, \ldots, a_n$ e $b_0, \ldots, b_n$ ponendo

$$a_0 = b_0 = 1, \qquad a_1 = b_1 = 7,$$

e successivamente, per ogni $i = 1, \ldots, n-1$,

$$a_{i+1} = \begin{cases} 2a_{i-1} + 3a_i & \text{se } \varepsilon_i = 0, \\ 3a_{i-1} + a_i & \text{se } \varepsilon_i = 1, \end{cases}$$

$$b_{i+1} = \begin{cases} 2b_{i-1} + 3b_i & \text{se } \varepsilon_{n-i} = 0, \\ 3b_{i-1} + b_i & \text{se } \varepsilon_{n-i} = 1. \end{cases}$$

Dimostrare che $a_n = b_n$.

Problema 50 (WC09-1)**.** Siano x, y, z numeri reali positivi tali che $x + y + z = 3$.

Dimostrare che

$$\frac{x^3}{y^3+8} + \frac{y^3}{z^3+8} + \frac{z^3}{x^3+8} \geq \frac{1}{9} + \frac{2}{27}(xy + yz + zx).$$

Problema 51 (WC09-2)**.** Siano a_1, a_2, $\ldots$, a_n numeri reali *positivi* tali che

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1.$$

Dimostrare che

$$\frac{a_1}{1-a_1} \cdot \frac{a_2}{1-a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{1-a_n} \leq \frac{1}{n^{n+1}} \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{1 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}.$$

Problema 52 (WC09-3)**.** Determinare il massimo valore possibile per la somma ciclica

$$\sqrt{|a_1 - a_2|} + \sqrt{|a_2 - a_3|} + \ldots + \sqrt{|a_{2008} - a_{2009}|} + \sqrt{|a_{2009} - a_1|},$$

dove gli a_i sono numeri reali tali che $0 \leq a_i \leq 1$ per ogni $i = 1, \ldots, 2009$.

Problema 53 (WC09-4)**.** Dimostrare che

$$(x^2+2)(y^2+2)(z^2+2) \geq 3(x+y+z)^2$$

per ogni terna (x, y, z) di numeri reali.

Problema 54 (WC09-5)**.** Siano x, y, z numeri reali positivi tali che $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$. Dimostrare che

$$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}} + \frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \geq 1.$$

Problema 55 (WC09-6)**.** Determinare la più piccola costante C tale che

$$\frac{x_1}{x_2x_3\cdots x_n+1} + \frac{x_2}{x_1x_3\cdots x_n+1} + \cdots + \frac{x_n}{x_1x_2\cdots x_{n-1}+1} \leq C$$

per ogni n-upla $(x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$.

Problema 56 (WC09-7)**.** Determinare tutte le funzioni $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tali che

- $f(1) = 2000$;
- $|f(x)| \leq x^2 + 10^6$;
- si ha che

  $$f\left(x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = f\left(x+\frac{1}{y}\right) + f\left(y+\frac{1}{x}\right)$$

  per ogni coppia di numeri reali positivi x e y.

Problema 57 (WC09-8)**.** Determinare tutti i polinomi $P(x)$ a coefficienti interi tali che, per ogni coppia (a, b) di numeri interi positivi tali che $a+b$ è un quadrato perfetto, anche $P(a)+P(b)$ è un quadrato perfetto.

[Se serve, si può utilizzare senza dimostrazione il seguente lemma: se $P(x)$ è un polinomio a coefficienti interi tale che $P(n)$ è un quadrato perfetto per ogni intero n, allora $P(x) = [Q(x)]^2$ per un opportuno polinomio $Q(x)$ a coefficienti interi]

Problema 58 (WC08-1)**.** Siano a, b, c numeri reali positivi. Dimostrare che

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

Problema 59 (WC08-2)**.** Determinare la più grande costante k tale che

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2} \geq k\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\right)^2$$

per ogni quintupla di numeri reali positivi a, b, c, d, e tali che $a+b=c+d+e$.

Problema 60 (WC08-3)**.** Sia m un intero positivo, e sia a_n la successione definita per ricorrenza da

$$a_0 = \frac{m}{2}, \qquad\qquad a_{n+1} = a_n \lceil a_n \rceil,$$

dove $\lceil a_n \rceil$ indica il più piccolo intero maggiore od uguale di a_n.

1. Determinare tutti gli interi m per cui il primo intero che compare nella successione è a_{2008}.

2. Determinare tutti gli interi m per cui nessun numero intero compare nella successione.

Problema 61 (WC08-4)**.** Siano a, b, c tre numeri reali positivi distinti.
Dimostrare che

$$\left|\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}\right| > 1.$$

Problema 62 (WC08-5)**.** Siano a, b, c numeri reali positivi.
Dimostrare che

$$\frac{a^3+abc}{b+c}+\frac{b^3+abc}{c+a}+\frac{c^3+abc}{a+b} \geq a^2+b^2+c^2.$$

Problema 63 (WC08-6)**.** Siano $a_1, \ldots, a_n$ una n-upla di numeri reali, e sia $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$.
Dimostrare che

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)^2 \leq \sum_{1\leq i\leq j\leq n}\left(\sum_{k=i}^{j} a_k\right)^2.$$

Determinare tutti i casi in cui si ha uguaglianza.

Problema 64 (WC08-7)**.** Sia $p(x)$ un polinomio monico a coefficienti interi di grado pari tale che $p(n)$ è un quadrato perfetto per infiniti valori interi di n.

Dimostrare che $p(x)$ è il quadrato di un polinomio a coefficienti interi.

Problema 65 (WC08-8)**.** Determinare tutte le funzioni $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ tali che

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y)$$

per ogni coppia di numeri reali positivi x e y.

Problema 66 (WC07-1)**.** Dimostrare che

$$\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} \leq 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right)$$

per ogni terna di numeri reali positivi a, b, c tali che $a + b + c = 1$.

Problema 67 (WC07-2)**.** Sia $n \geq 3$, e siano $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ numeri reali positivi tali che

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 1.$$

Dimostare che

$$a_1(b_1 + a_2) + a_2(b_2 + a_3) + \ldots + a_{n-1}(b_{n-1} + a_n) + a_n(b_n + a_1) < 1.$$

Problema 68 (WC07-3)**.** Dimostrare che, comunque si scelgano numeri reali $x_1, \ldots, x_n$, si ha che

$$\frac{x_1}{1 + x_1^2} + \frac{x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2} + \ldots + \frac{x_n}{1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2} < \sqrt{n}.$$

Problema 69 (PI14-1)**.** Determinare tutte le funzioni $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tali che

$$f(x + y - z) + f(2\sqrt{xz}) + f(2\sqrt{yz}) = f(x + y + z)$$

per ogni scelta di $x, y, z \geq 0$ tali che $x + y \geq z$.

Problema 70 (PI14-2)**.** Sia n un intero positivo.

1. Dimostrare che non esistono polinomi $p(x)$ a coefficienti reali di grado n tali che $p(i) = 2^i$ per ogni $i = 0, 1, \ldots, n, n+1$ e $p(n+2) = 2^{n+2} - n - 3$.

2. Dimostrare che esiste un unico polinomio $p(x)$ a coefficienti reali che soddisfa $n + 2$ delle $n + 3$ condizioni imposte al punto precedente.

Problema 71 (PI14-3)**.** Dimostrare che per ogni scelta dei reali non negativi x, y, z si ha che

$$\frac{x+y+z}{3} - \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{2}{3} \max\left\{(\sqrt{y} - \sqrt{z})^2, (\sqrt{z} - \sqrt{x})^2, (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2\right\}$$

Problema 72 (PI14-4)**.** Consideriamo dei reali a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 che soddisfano le seguenti equazioni,

$$\frac{a_1}{k^2+1} + \frac{a_2}{k^2+2} + \frac{a_3}{k^2+3} + \frac{a_4}{k^2+4} + \frac{a_5}{k^2+5} = \frac{1}{k^2} \qquad \text{per } k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Quanto vale $\frac{a_1}{37} + \frac{a_2}{38} + \frac{a_3}{39} + \frac{a_4}{40} + \frac{a_5}{41}$? (Scrivere il risultato sotto forma di frazione.)

Problema 73 (PI14-5)**.** Determinare il minimo valore della seguente espressione

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3+5}{a^3(b+c)}$$

al variare di a, b, c reali positivi tali che $abc = 1$.

Problema 74 (PI14-6)**.** Determinare tutte le funzioni reali tali che

$$f(f(x)+y) = f(f(x)-y) + 4f(x)y,$$

per ogni coppia di reali x, y.

Problema 75 (PI14-7)**.** Fissati tre numeri reali a, b, c tali che $a+b+c = 0$, determinare il massimo valore di

$$ax + by + cz$$

al variare dei reali x, y, z che rispettano il vincolo $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = 3$.

Problema 76 (PI14-8)**.** Dimostrare che esiste un'unica funzione f dagli interi positivi in sé tale che $f(1) = f(2) = 1$ e

$$f(n) = f(f(n-1)) + f(n - f(n-1)), \qquad \text{per } n \geq 3$$

Determinare il valore di $f(2^m)$ per ogni intero $m \geq 2$.

Problema 77 (PI13-1)**.** Determinare per quali n interi positivi la seguente equazione ha esattamente 2013 soluzioni reali positive

$$\frac{1}{x + n^{-2}} = \left\lfloor \frac{1}{x} - n^{-2} \right\rfloor.$$

Ovviamente $\lfloor y \rfloor$ denota la parte intera di y.

Problema 78 (PI13-2)**.** Per ogni $n \geq 2$ intero, siano a_n, b_n e c_n gli unici numeri interi tali che

$$\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)^n = a_n + b_n\sqrt[3]{2} + c_n\sqrt[3]{4}.$$

Si dimostri che $c_n \equiv 1 \pmod 3$ se e solo se $n \equiv 2 \pmod 3$.

Problema 79 (PI13-3)**.** Dimostrare che per ogni terna $a, b, c \geq 0$ per cui $a + b + c = 3$, si ha

$$3(a^4 + b^4 + c^4) + 33 \geq 14(a^2 + b^2 + c^2).$$

Problema 80 (PI13-4)**.** Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali di grado $2n - 1$ tale che $p(k) = |k|$ per $k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$. Quanto vale $p(0)$?

Problema 81 (PI13-5)**.** Dato N intero positivo e $a \in (0, 1)$, trovare la costante $C(a, N)$ ottimale affinché per ogni scelta di $n \geq 1$ interi distinti $k_1, k_2, \ldots, k_n$ si abbia

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a^{k_i}\right)^N \leq C(a, N) \sum_{i=1}^{n} a^{Nk_i}.$$

Problema 82 (PI13-6)**.** Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfano l'equazione

$$f(x + yf(x)) = f(f(x)) + xf(y).$$

per ogni coppia di reali x, y.

Problema 83 (PI13-7)**.** Determinare il più piccolo numero reale M tale che la disuguaglianza

$$\left|ab\left(a^2-b^2\right)+bc\left(b^2-c^2\right)+ca\left(c^2-a^2\right)\right| \leq M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

valga per tutte le scelte di a, b e c reali.

Problema 84 (PI13-8)**.** Determinare tutti i polinomi a coefficienti interi $p(x)$ tali che per ogni coppia di interi positivi a e b la cui somma è un quadrato perfetto, pure $p(a)+p(b)$ è un quadrato perfetto.

Problema 85 (PI12-1)**.** Determinare tutte le soluzioni reali del seguente sistema

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^3+y^3+z^3=18 \\ x^7+y^7+z^7=2058 \end{cases}$$

Problema 86 (PI12-2)**.** Determinare il più grande reale k tale che

$$\frac{a}{b+2c+d}+\frac{b}{c+2d+a}+\frac{c}{d+2a+b}+\frac{d}{a+2b+c} \geq k$$

per ogni $a,b,c,d>0$

Problema 87 (PI12-3)**.** Determinare tutti i polinomi reali f e g tali che

$$(x^2+x+1)\cdot f(x^2-x+1)=(x^2-x+1)\cdot g(x^2+x+1),$$

per ogni x reale.

Problema 88 (PI12-4)**.** Sia f una funzione dagli interi positivi in sé tale che $f(1)=1$ e

$$f(n)=n-f(f(n-1)) \qquad n\geq 2.$$

Dimostrare che $f(n+f(n))=n$ per ogni intero positivo n.

Problema 89 (PI12-5)**.** Determinare tutte le funzioni f dai reali in sé tali che

$$f(f(x+y))=f(x+y)+f(x)f(y)-xy;$$

per ogni x,y reali.

Problema 90 (PI12-6)**.** Sia $n \geq 2$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reali positivi tali che $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Dimostrare che

$$\frac{a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n}{a_1 + n - 2} + \frac{a_1 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n}{a_2 + n - 2} + \cdots + \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{n-1}}{a_n + n - 2} \leq \frac{1}{(n-1)^2}.$$

Problema 91 (PI12-7)**.** Determinare tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 0 \\ a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 0 \\ a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 = 10 \end{cases}$$

con $a, b, c, d, e \in [-2, 2]$.

Problema 92 (PI12-8)**.** Sia n un intero positivo. Dimostrare che esistono n reali $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nell'intervallo $(0, 1)$ tali che la seguente condizione è soddisfatta per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$: se un polinomio $p_i(x)$ di grado $n + 1$ si annulla in $0, 1, a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$, allora $\max_{x \in [0,1]} |p_i(x)| = |p_i(a_i)|$.

Problema 93 (PI11-1)**.** Siano a, b, c, d numeri reali positivi tali che $a + b + c + d = 1$.

Dimostrare che

$$\frac{1}{4a + 3b + c} + \frac{1}{4b + 3c + d} + \frac{1}{4c + 3d + a} + \frac{1}{4d + 3a + b} \geq 2.$$

Problema 94 (PI11-2)**.** Sia x un numero reale positivo. Determinare, in funzione di x, il più piccolo numero naturale n per cui esistono n numeri reali nell'intervallo aperto $(-1, 1)$ tali che la loro somma sia nulla e la somma dei loro quadrati sia uguale a x.

Problema 95 (PI11-3)**.** Sia $P(x)$ un polinomio di grado d tale che

$$P(n) = \binom{d+1}{n}^{-1}$$

per ogni intero n con $0 \leq n \leq d$.

Determinare $P(d + 1)$.

Problema 96 (PI11-4)**.** Siano a, b, c, d numeri reali qualsiasi. Determinare tutte le soluzioni (x, y, z, t) del seguente sistema

$$\begin{cases} x^2 - yz - zt - ty = a, \\ y^2 - zt - tx - xz = b, \\ z^2 - tx - xy - yt = c, \\ t^2 - xy - yz - zx = d. \end{cases}$$

Problema 97 (PI11-5)**.** Trovare tutte le fuzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x + y)f(x - y) = (f(x) + f(y))^2 - 4x^2 f(y)$$

per ogni coppia di numeri reali x e y.

Problema 98 (PI11-6)**.** Per ogni intero $n \geq 3$ determinare il massimo valore che può assumere il prodotto di n numeri reali non negativi x_1, x_2, $\ldots$, x_n soggetti al vincolo

$$\frac{x_1}{1 + x_1} + \frac{x_2}{1 + x_2} + \cdots + \frac{x_n}{1 + x_n} = 1.$$

Problema 99 (PI11-7)**.** Determinare tutte le funzioni surgettive $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x + f(x) + 2f(y)) = f(2x) + f(2y).$$

per ogni coppia di numeri reali x e y.

Problema 100 (PI11-8)**.** Dimostrare che

$$\frac{1}{x^2(y + 1)} + \frac{1}{y^2(z + 1)} + \frac{1}{z^2(x + 1)} \geq \frac{3}{4(x + y + z)}$$

per ogni terna di numeri reali positivi x, y, z tali che $xyz = 3(x + y + z)$.

Problema 101 (PI10-1)**.** Sia n un intero positivo, e siano a_1, a_2, $\ldots$, a_n numeri reali positivi il cui prodotto è uguale ad 1. Poniamo $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Dimostrare che

$$\frac{a_1^2}{S + 1 - a_1} + \frac{a_2^2}{S + 1 - a_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{S + 1 - a_n} \geq 1.$$

Problema 102 (PI10-2)**.** Determinare tutti i valori positivi del parametro α per cui si ha che

$$x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha + w^\alpha \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}$$

per ogni quaterna di numeri reali positivi (x, y, z, w) tali che $xyzw = 1$.

Problema 103 (PI10-3)**.** Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x^3) + f(y^3) = (x + y)\big(f(x^2) + f(y^2) - f(xy)\big)$$

per ogni coppia di numeri reali x e y.

Problema 104 (PI10-4)**.** Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali positivi (debolmente) decrescente. Supponiamo che esista una costante reale M tale che

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che la successione

$$b_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$$

non è limitata superiormente.

Problema 105 (PI10-5)**.** Siano a, b, c numeri reali positivi tali che $a+b+c = 3$.

Dimostrare che

$$\frac{a+3}{3a+bc} + \frac{b+3}{3b+ca} + \frac{c+3}{3c+ab} \geq 3.$$

Problema 106 (PI10-6)**.** Sia $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio a coefficienti reali tale che

$$\min\{d, b+d\} > \max\{|c|, |a+c|\}.$$

Dimostrare che $p(x)$ non ha radici reali contenute nell'intervallo $[-1, 1]$.

Problema 107 (PI10-7)**.** Dimostrare che, per ogni funzione $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, esistono almeno due numeri reali $x > 0$ e $y > 0$ tali che

$$f(x + y) < yf(f(x)).$$

Problema 108 (PI10-8)**.** Sia $n \geq 2$ un numero intero, e siano a_1, a_2, $\ldots$, a_n numeri reali positivi.

Dimostrare che

$$\sum_{i<j} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leq \frac{n}{2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)} \cdot \sum_{i<j} a_i a_j.$$

Problema 109 (PI09-1)**.** Sia $n \geq 2$ un intero, e sia

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

un polinomio a coefficienti interi. Supponiamo che a_0 sia un numero primo, e

$$|a_0| > |a_1| + \ldots + |a_n|.$$

Dimostrare che $p(x)$ è irriducibile tra i polinomi a coefficienti interi (cioè non è possibile scrivere $p(x)$ come prodotto di due polinomi a coefficienti interi di grado minore di n).

Problema 110 (PI09-2)**.** Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Q}^+ \to Z$ tali che

i. $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$,

ii. $(x+1)f(x-1) = xf(x)$,

per tutti gli $x > 1$.

Problema 111 (PI09-3)**.** Siano $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ reali tali che $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. Dimostrare che

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + n x_1 x_n \leq 0.$$

Problema 112 (PI09-4)**.** Consideriamo a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 reali che soddisfano le seguenti equazioni

$$\frac{a_1}{k^2+1} + \frac{a_2}{k^2+2} + \frac{a_3}{k^2+3} + \frac{a_4}{k^2+4} + \frac{a_5}{k^2+5} = \frac{1}{k^2} \text{ per } k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Quanto vale $\frac{a_1}{37} + \frac{a_2}{38} + \frac{a_3}{39} + \frac{a_4}{40} + \frac{a_5}{41}$? (Scrivere il risultato sotto forma di frazione.)

Problema 113 (PI09-5)**.** Trova tutti i polinomi f a coefficienti interi tali che, per ogni primo p e ogni coppia di numeri naturali u, v tali che $p|uv-1$ valga $p \mid f(u)f(v)-1$.

Problema 114 (PI09-6)**.** Trovare tutte le funzioni $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ per cui esiste $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ strettamente monotona tale che:

$$f(x+y) = f(x)u(y) + f(y)$$

Problema 115 (PI09-7)**.** Si dimostri che per tutti gli $a,b,c,d \geq 0$ vale

$$(ab)^{1/3} + (cd)^{1/3} \leq ((a+c+b)\,(a+c+d))^{1/3}$$

Problema 116 (PI09-8)**.** Siano a,b,c,d reali positivi tali che $abcd = 1$ e $a+b+c+d > \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$. Si dimostri che

$$a+b+c+d < \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}.$$

Problema 117 (PI08-1)**.** Determinare tutte le funzioni iniettive $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tali che

$$f(f(n)) \leq \frac{n+f(n)}{2}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Problema 118 (PI08-2)**.** Trovare tutti i polinomi $p(x)$ a coefficienti reali tali che

$$p(-x^2) = p(x)\cdot p(x-1).$$

Problema 119 (PI08-3)**.** Siano a, b, c numeri reali positivi tali che $(a+b)(b+c)(c+a) = 8$.

Dimostrare che

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[27]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

Problema 120 (PI08-4)**.** Siano m,n interi positivi con m dispari. Dimostrare che

$$\frac{1}{2^m n}\sum_{k=0}^{m}\binom{2m}{2k}(2n-1)^k$$

è un numero intero.

Problema 121 (PI08-5)**.** Siano a, b, c numeri reali positivi tali che

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\geq 1.$$

Dimostrare che

$$a+b+c\geq ab+bc+ca.$$

Problema 122 (PI08-6)**.** Sia n un intero positivo.

1. Dimostrare che non esistono polinomi $p(x)$ a coefficienti reali di grado n tali che $p(i)=2^i$ per ogni $i=0,1,\ldots,n,n+1$ e $p(n+2)=2^{n+2}-n-3$.

2. Dimostrare che esiste un unico polinomio $p(x)$ a coefficienti reali che soddisfa $n+2$ delle $n+3$ condizioni imposte al punto precedente.

Problema 123 (PI08-7)**.** Determinare tutte le funzioni $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ tali che

$$f(x)f(y)=2008\cdot f(x+yf(x))$$

per ogni coppia di numeri reali positivi x e y.

Problema 124 (PI08-8)**.** Sia n un intero positivo. Determinare più grande costante k_n tale che

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i^2)\geq k_n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$$

per ogni n-upla di numeri reali $x_1,\ldots,x_n$.

Problema 125 (PI07-1)**.** Dimostrare che 3 numeri reali positivi x, y, z soddisfano l'uguaglianza

$$\frac{x(y-z)}{y+z}+\frac{y(z-x)}{z+x}+\frac{z(x-y)}{x+y}=0$$

se e solo se almeno 2 di essi sono uguali tra di loro.

Problema 126 (PI07-2)**.** Sia $n\geq 1$ un numero intero. Determinare tutte le n-uple ordinate $(a_1,\ldots,a_n)$ di numeri interi tali che

1. $a_1+\ldots+a_n\geq n^2$;

2. $a_1^2+\ldots+a_n^2\leq n^3+2$.

Problema 127 (PI07-3)**.** Siano a, b, c numeri reali positivi tali che $a+b+c = 1$.

Dimostrare che

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Problema 128 (PI07-4)**.** Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tali che

$$f(x + f(y)) = f(x) + y + 7$$

per ogni coppia di numeri razionali x e y.

Problema 129 (PI07-5)**.** Sia $p(x)$ un polinomio di terzo grado a coefficienti complessi. Supponiamo che esistono infinite coppie di interi x, y tali che $xp(x) = yp(y)$.

Dimostrare che

1. $p(x)$ ha almeno una radice intera;

2. la somma delle radici di $p(x)$ è un intero pari.

Problema 130 (PI07-6)**.** Siano a, b, c numeri reali positivi tali che a^2, b^2, c^2 sono le lunghezze dei lati di un triangolo.

Dimostrare che

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3) > 4(a^6 + b^6 + c^6) + 12a^2b^2c^2.$$

Problema 131 (PI07-7)**.** Sia $n \geq 2$ un numero intero e siano $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(b_1, \ldots, b_n)$ due n-uple di numeri reali tali che

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0.$$

Dimostrare che

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 \leq n.$$

Problema 132 (PI07-8)**.** Determinare tutte le coppie di funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

1. per ogni coppia di numeri reali x e y si ha che

$$f(x \cdot g(y+1)) + y = x \cdot f(y) + f(x + g(y));$$

2. $f(0) + g(0) = 0$.

Problema 133 (PI06-1)**.** Siano p e q interi positivi, e sia

$$P(x) = (x+1)^p (x-3)^q = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n.$$

Determinare tutte le coppie (p, q) di interi positivi per cui si ha che $a_1 = a_2$.

Problema 134 (PI06-2)**.** Sia $P(x)$ il polinomio di grado n tale che $P(k) = 1/k$ per $k = 1, 2, \ldots, n+1$.

Determinare $P(n+2)$.

Problema 135 (PI06-3)**.** Siano x, y, z numeri reali non negativi tali che $x + y + z = 1$. Determinare il massimo valore possibile per ciascuna delle seguenti espressioni

$$\sum_{\text{sym}} x^2 y, \qquad \sum_{\text{cyc}} x^2 y.$$

Problema 136 (PI06-4)**.** Siano a, b, c numeri reali positivi tali che

$$a + b + c \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

1. Dimostrare che
$$a + b + c \geq \frac{3}{abc}.$$

2. Determinare se necessariamente si ha che $abc \geq 1$.

Problema 137 (PI06-5)**.** Siano a, b, c le lunghezze dei lati di un triangolo, e siano m_a, m_b, m_c le lunghezze delle relative mediane.

Dimostrare che

$$\left(\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \right)^2 \geq 4 \frac{(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Problema 138 (PI06-6)**.** Siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numeri reali positivi.

Dimostrare che

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_1+\ldots+x_n} < \sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

Problema 139 (PI06-7)**.** Determinare tutte le quaterne di interi (a, b, m, n), con $m > n > 1$, per cui il polinomio $x^n + ax + b$ divide il polinomio $x^m + ax + b$.

Problema 140 (PI06-8)**.** Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + 2xy + 1$$

per ogni coppia di numeri reali x e y.