Francesco Morandin 5 maggio 2017

Problemi di Algebra e di Teoria dei Numeri

4 "MATERIE"

- ALGEBRA
- TEORIA DEI NUMERI
- GEOMETRIA
- COMBINATORIA

} TAG

LOGICA

Suggerimento : SUMATRA PDF

Ctrl - trascino + copio

eventualmente TeX

F1601 1 Cinque amici, Aurelio, Ennio, Flaminia, Lucia e Regolo, hanno mangiato al ristorante. Il conto è di 180 euro, e viene pagato da Lucia, Ennio e Regolo: la prima paga 90 euro, il secondo 57 euro e il terzo 33 euro. Qual è il minimo numero di transazioni del tipo "Tizio dà n euro a Caio" che devono essere effettuate in modo che alla fine ognuno dei cinque abbia pagato la stessa cifra?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

F1201 1 Due numeri a e b sono tali che $\dfrac{3a+b}{a-b} = 2$. Quanto vale $\dfrac{a^3}{b^3}$?

A: manipolazioni

divido per b sopra e sotto

$$\frac{3\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}-1} = 2 \qquad x \leftarrow \frac{a}{b}$$

$$\frac{3x+1}{x-1} = 2$$

F1007 2 Qual è la seconda cifra (partendo da sinistra) del numero $(10^{16}+1)(10^8+1)(10^4+1)(10^2+1)(10+1)$?

A: manipolazioni
A: prodotti notevoli

$$(10-1)(10+1)(10^2+1)(10^4+1)\dots(10^{16}+1) =$$
$$(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)\dots(10^{16}+1) =$$
$$\dots (10^{16}-1)(10^{16}+1) = 10^{32}-1 = \overbrace{999\dots9}^{32}$$

F1312 3 Quante sono le coppie di interi ordinate (x, y) tali che $xy = 4(y^2 + x)$?

A: manipolazioni
N: diofantea

$64 = 2^6 \quad 7$

$$x(y-4) = 4y^2$$

$$x = \frac{4y^2}{y-4} = 4y + \frac{16y}{y-4} = 4y + 16 + \frac{64}{y-4}$$

$$y = 5 \rightarrow x = 100$$

F1513 4

Quanto vale $\sqrt[4]{2^{20}+2^{27}+2^{31}+2^{32}+2^{37}+2^{40}}$?

A : manipolazioni

A : prodotti notevoli $\quad (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$$= 2^5\sqrt[4]{1+2^7+2^{11}+2^{12}+2^{17}+2^{20}}$$

$$= 2^5\sqrt[4]{1+4\cdot 2^5+6\cdot 2^{10}+4\cdot 2^{15}+2^{20}} = 2^5(1+2^5)$$

$$= 2^5\sqrt[4]{(1+2^6+2^{10})^2} = 2^5\sqrt{(1+2^5)^2} = \dots$$

F1712 2

Sia n un intero positivo tale che la rappresentazione decimale di 2^n inizia con la cifra 7 (ovvero la cifra non nulla più a sinistra è 7). Con che cifra inizia la rappresentazione decimale di 5^n?

A : disuguaglianze

$2^n = 7\dots\dots \qquad 7\cdot 10^k \leq 2^n < 8\cdot 10^k$

$5^n = 13\dots$

$10^n = 10000\dots \qquad 5^n = \dfrac{10^n}{2^n} \qquad \dfrac{10^n}{8\cdot 10^k} < 5^n \leq \dfrac{10^n}{7\cdot 10^k}$

$0{,}125 \qquad \frac{1}{8}\cdot 10^{n-k} < 5^n \leq \frac{1}{7}\cdot 10^{n-k} \qquad 1{,}41$

F1205 3

Si sa che $p(x)$ è un polinomio monico di grado 5. Inoltre, si sa che le soluzioni dell'equazione $p(x)=0$ sono esattamente $x=0,1,2,4$. Determinare il massimo valore che può assumere il coefficiente del termine di primo grado.

Nota: un polinomio è *monico* se il coefficiente del suo termine di grado più alto (nel nostro caso: quello di quinto grado) è 1.

A : polinomi

A : viete (relazioni radici - coefficienti)

A : radici complesse

Le radici sono tutte reali : 0, 1, 2, 4 e una doppia

$p(x) = x^5 - (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)x^4 + \dots + (\alpha\beta\gamma\delta+\alpha\beta\gamma\varepsilon+\dots)x - \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$

$1\cdot 2\cdot 4\cdot 4 = 32$

F1705 2

Il polinomio $P(x)$, di grado 42, assume il valore 0 nei primi 21 numeri **primi** dispari e nei loro reciproci (si ricorda che il reciproco di un intero positivo n è il numero razionale $1/n$). Quanto vale il rapporto $P(2)/P(1/2)$?

A: interpolazione

A: polinomi

$$P(x) = a(x-3)(x-5)\ldots(x-p)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)\ldots\left(x-\frac{1}{p}\right)$$
$$= \tilde{a}(x-3)(3x-1)(x-5)(5x-1)\cdot\ldots\cdot(x-p)(px-1)$$

$$\frac{P(2)}{P(1/2)} = \frac{(2-3)(6-1)(2-5)(10-1)\cdot\ldots}{\left(\frac{1}{2}\right)^{42}(1-6)(3-2)(1-10)(5-2)\cdot\ldots} = 2^{42}$$

A1613 2

Un motorino e una bicicletta percorrono un grande tracciato di forma quadrata, partendo nello stesso istante da uno dei vertici e procedendo ambedue in senso orario. Il lato del tracciato misura 90 km. Il motorino viaggia alla velocità costante di 65 km orari, la bicicletta a 30 km orari. Dopo quante ore i due si incontreranno di nuovo in uno dei quattro vertici del tracciato?

A: velocità

F1404 2

Davide fa il seguente gioco: parte da un numero intero compreso tra 1 e 99 e ad ogni mossa sostituisce il numero n che ha al momento con il numero formato dalle ultime due cifre di $51n+50$ (o solo dall'ultima cifra, se la penultima è 0). Quanti numeri diversi può ottenere al massimo nel corso delle prime 100 mosse di una singola partita?

N: modulo (congruenze)

modulo 100 → modulo 4

↳ modulo 25 $\quad 51n+50 \equiv 1\cdot n + 0 \equiv n \pmod{25}$

$12 \to 12\cdot 51 + 50 = 662 \to 62 \equiv 12 \pmod{25}$

modulo 4 $\quad 51n+50 \equiv 3n+2 \equiv -n+2 \pmod 4$

$0 \to 2$
$1 \to 1$
$2 \to 0$
$3 \to 3$

La risposta è 2

$x \equiv 13 \pmod{100}$

$x = 13 + 100k = 1 + 4(3+25k) \equiv 1 \pmod 4$

F1015 4 Trovare tutte le terne ordinate di numeri interi positivi (p, q, n) tali che p, q siano primi e $p^2 + q^2 = pqn + 1$.

F1111 4 x e y sono due interi positivi tali che $x^2 - y^2$ è positivo, multiplo di 2011 e ha esattamente 2011 divisori positivi. Quante sono le coppie ordinate (x, y) che verificano tali condizioni?
Nota: 2011 è un numero primo

F1011 3 In una scatola ci sono venti palline numerate da 1 a 20. Ciascun numero è presente in una e una sola di queste palline. Quante palline diverse dobbiamo estrarre come minimo, per essere sicuri che il prodotto dei loro numeri sia un multiplo di 12?